Bài toán: Dãy con có tổng chia hết cho k

1. Đề bài: Cho 1 dãy gồm n số nguyên dương và số nguyên dương k. Hãy tìm dãy con gồm nhiều phần tử nhất của dãy (không nhất thiết liên tiếp )đã cho sao cho tổng các phần tử của dãy này chia hết cho k

VD: Input: n =6, k=5

Dãy A[6] = 11, 6, 7, 12, 20, 8

Output: Dãy con dài nhất có tổng chia hết cho 5 là: 11, 6, 20, 8

1. Phân tích: Giải bằng phương pháp quy hoạch động

Kết quả bài toán là dãy con có độ dài lớn nhất và có tổng chia hết cho k

* Hàm tối ưu: F(i, v) = chiều dài dãy con dài nhất khi xét dãy A[1] đến A[i] có tổng chia k dư v.
  + Nếu A[i] không chứa trong dãy con dài nhất: F(i, v) = F(i-1, v)
  + Nếu A[i] chứa trong dãy con dài nhất:

Gọi r = A[i] mod k ta có F(i, v) = F(i-1, v-r) + 1

* Nếu v – r = 0: F(i, v) = F(i-1, 0) + 1
* Nếu v – r > 0 và F(i-1, v-r) > 0:F(i, v) = F(i-1, v-r) + 1
* Nếu v – r < 0 và F(i-1, v-r+k)>0: F(i, v) = F(i-1, v-r+k) + 1
* Công thức truy hồi:
* Nếu v = r : F(i, v) = max{F(i-1, v), F(i-1, 0) + 1}
* Nếu và F(i-1, (v-r+k) % k) > 0:

F(i, v) = max{F(i-1, v), F(i-1, (v-r+k) % k) + 1}

* Cơ sở quy hoạch động:

Bài toán nhỏ nhất ứng với i=1:

* F(1, v) = 0 nếu
* F(1, v) = 1 nếu r = v
* Xây dựng bảng phương án:

Áp dụng công thức truy hồi, ta có bảng phướng án sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | A[i] | r = A[i] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 7 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | 12 | 2 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 20 | 0 | 4 | 5 | 3 | 3 | 4 |
| 6 | 8 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |

* Truy vết tìm nghiệm

Bắt đầu từ ô F(n, 0) trên dòng n ta dò ngược về dòng 0 theo nguyên tắc

* Nếu F[i][v] = F[i-1][0] + 1 hoặc F[i][v] == F[i-1][(v-r+k)%k] +1
* A[i] được chọn
* Tìm tiếp ở ô F[i-1, (v – r + k) %k]
* Ngược lại thì A[i] không được chọn và ta tìm tiếp ở ô F[i-1, v]

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | A[i] | r = A[i] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 7 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | 12 | 2 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 20 | 0 | 4 | 5 | 3 | 3 | 4 |
| 6 | 8 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |

1. Lược đồ chương trình

**/\*Cơ sở QHD\*/**

**for**(v=0 .. k-1)

{

**if**(A[1]%k == v)

F[1][v] = 1;

**else**

F[1][v] = 0;

}

**/\* Xây dựng bảng phương án \*/**

**for**(i=2..n)

{

**for**(v=0..k-1)

{

r = A[i]%k;

F[i][v] = F[i-1][v];

**if**(v==r && F[i][v] < (F[i-1][0] +1))

F[i][v] = F[i-1][0] + 1;

**else** if(F[i-1][((v-r+k)%k)] > 0 && F[i][v] < (F[i-1][((v-r+k)%k)] +1))

F[i][v] = F[i-1][(v-r+k)%k] + 1;

}

}

**/\* Truy vết \*/**

while(i>=0 && v >=0)

{

r = A[i] % k;

if(F[i][v] == F[i-1][0] + 1 || F[i][v] == F[i-1][(v-r+k)%k] +1)

{

printf("%d\t",A[i]);

v = (v-r+k)%k;

}

i--;

}